

**Nationale Mathematikolympiade****Kreisphase/Sektorenphase der Hauptstadt Bucharest, 2026****XI-te Klasse**

Aufgabe 1. Es sei $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ eine umkehrbare Matrix, mit der Eigenschaft

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Zeigt, dass $\det(A + A^{-1}) = (\text{Tr}(A))^2$, wobei $\text{Tr}(A)$ die Spur der Matrix A , d.h. die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonale ist.

Aufgabe 2. Es sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von reellen Zahlen, mit $x_1, x_2 \in (0, 1)$, für welche

$$x_{n+2} = x_n^2 \cdot x_{n+1} - x_n^2 + 1,$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

a) Zeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 x_2 \dots x_n = 0$.

b) Bestimmt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \dots x_n$.

Gazeta Matematică

Aufgabe 3. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Bestimmt alle Matrizen $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft, dass, wenn $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ die Gleichheit $AB = M$ erfüllen, dann auch $BA = M$ gilt.

Aufgabe 4. Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht konstante stetige Funktion. Wir betrachten die Funktion $g : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(y) = \inf\{x \in [0, 1] \mid f(x) = y\}, \text{ für alle } y \in \text{Im}(f),$$

wobei $\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$. Beweist, dass die Funktion g dann und genau dann stetig ist, wenn es $a \in (0, 1]$ so gibt, dass f streng monoton auf dem Intervall $[0, a]$ ist und $\text{Im}(f) = f([0, a])$ gilt.

Arbeitszeit 3 Stunden.

Jede Aufgabe wird mit 22,5 Punkte bewertet.